ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део први

9. септембар 2013

Професор: Игор Долинка Асистент: Бојан Башић

1. Нека су d и n природни бројеви.

   a) Доказати да d дели n ако и само ако d дели збир цифара броја n записаног у систему са основом $d+1$.

   b) Доказати да d дели n ако и само ако d дели разлику збирова цифара на парним и на непарним позицијама броја n записаног у систему са основом $d-1$.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 15 = 15(x+1)^y.$$

3. Нека је $A = 2012^{2013}$, нека је B збир цифара броја A записаног у систему са основом 8, нека је C збир цифара броја B записаног у систему са основом 8, и нека је D збир цифара броја C записаног у систему са основом 8. Одредити број D.

ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део други

9. септембар 2013

Професор: Игор Долинка Асистент: Бојан Башић

1. Доказати да се ниједан број који даје остатак 3 при дељењу са 4 не може представити као збир квадрата два цела броја.

2. Доказати да за сваки паран природан број $n < 4 \cdot 10^{18}$ постоје $a, b \in \mathbb{N}$ такви да важи $n = \varphi(a) + \varphi(b)$.

3. Доказати да, за сваки прост број $p > 5$, постоје два узастопна природна броја која су оба квадратни остаци по модулу p.

   <u>Једна идеја:</u> Посматрати парове $(1,2)$, $(4,5)$ и $(9,10)$. Разликовати два случаја у зависности од тога да ли је 10 квадратни остатак по модулу p или није.